

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025****CLASA a VII-a**

**Problema 1.** Determinați numerele naturale de patru cifre  $\overline{abcd}$  pentru care numărul  $\sqrt{ab} - 4 + \sqrt{cd}$  este pătratul unui număr prim  $p$ , iar  $\overline{cd} - \overline{ab} = p + 2$ .

*Gazeta Matematică*

**Problema 2.** Determinați mulțimea numerelor raționale  $r$  pentru care există numerele naturale nenule  $a$  și  $b$  astfel încât  $\frac{a+b}{2} - \sqrt{a \cdot b} = r$ .

**Problema 3.** Considerăm pătratele  $ABCD$  și  $BEFG$ , astfel încât  $B$  se află pe segmentul  $(AE)$  și  $G$  se află pe segmentul  $(BC)$ . Fie  $H$  intersecția dreptelor  $DF$  și  $EG$ . Perpendiculara în  $H$  pe  $DF$  taie dreptele  $AE$  și  $BC$  în punctele  $I$ , respectiv  $J$ . Arătați că patrulaterul  $DIFJ$  este pătrat.

**Problema 4.** Considerăm un triunghi ascuțitunghic  $ABC$ , cu  $AB < AC$  și punctele  $D, I, J, K$ , astfel încât  $D$  este mijlocul laturii  $BC$ , iar  $I, J, K$  sunt picioarele înălțimilor din  $A, B$ , respectiv  $C$  ale acestuia. Perpendiculara în  $A$  pe dreapta  $AD$  intersectează dreptele  $BJ$  și  $CK$  în punctele  $N$ , respectiv  $Q$ , iar paralela prin  $A$  la  $BC$  intersectează dreptele  $IJ$  și  $IK$  în punctele  $M$ , respectiv  $P$ . Demonstrați că patrulaterul  $MNPQ$  este paralelogram.

*Timp de lucru 3 ore.**Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*