

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2025****CLASA a IX-a**

Problema 1. Fie $ABCD$ un paralelogram și O intersecția diagonalelor. Demonstrați că pentru orice punct $M \in (AB)$, există în mod unic punctele $N \in (OC)$ și $P \in (OD)$ astfel încât O este centrul de greutate al triunghiului MNP .

Problema 2. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația:

$$\frac{1}{\{x\}} + \frac{1}{[x]} + \frac{1}{x} = 0,$$

unde $[x]$ și $\{x\}$ sunt partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

Gazeta Matematică

Problema 3. Determinați numerele reale pozitive a, b, c, d astfel încât $a+b+c+d = 80$ și

$$a + \frac{b}{1+a} + \frac{c}{1+a+b} + \frac{d}{1+a+b+c} = 8.$$

Problema 4. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir crescător nemărginit de numere naturale cu $x_1 = 1$ și $x_{n+1} \leq 2x_n$, pentru orice $n \geq 1$. Demonstrați că orice număr natural nenul se poate scrie ca sumă finită de termeni distincți doi câte doi ai șirului $(x_n)_{n \geq 1}$.

Notă: Doi termeni x_i și x_j ai șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ se numesc distincți dacă $i \neq j$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.