



Országos Matematikaolimpia  
Megyei forduló - 2025. március 8.

## IX. OSZTÁLY

**1. feladat.** Az  $ABCD$  paralelogramma átlói az  $O$  pontban metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy bármilyen  $M \in (AB)$  pont esetén egy és csak egy olyan  $N \in (OC)$  és egy és csak egy olyan  $P \in (OD)$  pont létezik, amelyre  $O$  az  $MNP$  háromszög súlypontja!

**2. feladat.** Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{1}{\{x\}} + \frac{1}{[x]} + \frac{1}{x} = 0,$$

ahol  $[x]$  és  $\{x\}$  az  $x$  valós szám egészrészét illetve törtrészét jelöli.

*Gazeta Matematică*

**3. feladat.** Határozd meg azokat az  $a, b, c$  és  $d$  pozitív valós számokat, amelyekre  $a + b + c + d = 80$  és

$$a + \frac{b}{1+a} + \frac{c}{1+a+b} + \frac{d}{1+a+b+c} = 8.$$

**4. feladat.** Legyen  $(x_n)_{n \geq 1}$  egy növekvő, nem korlátos, természetes számsorozat, amelyre  $x_1 = 1$  és  $x_{n+1} \leq 2x_n$  bármely  $n \geq 1$  esetén. Bizonyítsd be, hogy minden nemnulla természetes számot felírhatunk az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat páronként különböző tagjaiból álló véges összegeként!

*Megjegyzés:* Az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat két  $x_i$  és  $x_j$  tagja különböző, ha  $i \neq j$ .

*Munkaidő 3 óra.*

*Minden feladatra legfeljebb 7 pont szerezhető.*