

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)
Matematică M_{șt-nat}

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

THEMA I

(30 Puncte)

- 5p 1. Bestimme das Glied a_2 der arithmetischen Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ so, dass $a_1 = 5$ und $a_3 = 35$.
- 5p 2. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Bestimme die reelle Zahl m so, dass $f(m) = f(0) \cdot f(1)$.
- 5p 3. Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\sqrt[3]{x^2 - 4} = \sqrt[3]{3x - 6}$.
- 5p 4. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewählte natürliche einstellige Zahl n die Ungleichheit $3n^2 < 100$ prüft.
- 5p 5. Gegeben sind die Punkte $A(0,2)$, $B(2,5)$ und C in dem kartesischen Koordinatensystem xOy , wobei B die Mitte der Strecke AC ist. Bestimme die Koordinaten des Punktes C .
- 5p 6. Gegeben ist das Dreieck ABC , rechtwinklig in A , mit $AB = AC$ und der Flächeninhalt ist gleich mit 18. Zeige, dass $BC = 6\sqrt{2}$.

THEMA II

(30 Puncte)

1. Gegeben sind die Matrizen $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 3x \\ -x & 1+4x \end{pmatrix}$, wobei x eine reelle Zahl ist.
- 5p a) Zeige, dass $\det(A(2)) = 3$.
- 5p b) Zeige, dass $xA(y) - A(xy) = (x-1)I_2$, für alle reellen Zahlen x und y .
- 5p c) Bestimme die reellen Zahlen x so, dass $A(1) \cdot A(x-1) = xA(x)$.
2. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung $x \circ y = \frac{1}{4}(x+1)(y+1) - 1$.
- 5p a) Zeige, dass $1 \circ 5 = 2$.
- 5p b) Zeige, dass $e = 3$ das neutrale Element der Verknüpfung „ \circ ” ist.
- 5p c) Bestimme die Paare (m, n) von natürlichen Zahlen, mit $m \leq n$, so, dass $m \circ n = 3$.

THEMA III

(30 Puncte)

1. Gegeben ist die Funktion $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 1 + \ln x$.
- 5p a) Zeige, dass $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Zeige, dass $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 3x}{\ln x} = 3$.
- 5p c) Beweise, dass $f(x) + f(y) \leq -\frac{21}{4}$, für jedes $x \in (0, 1]$ und jedes $y \in [1, 2]$.
2. Gegeben ist die Funktion $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.
- 5p a) Zeige, dass $\int_2^4 f(x) \sqrt{x} dx = 4$.
- 5p b) Zeige, dass $\int_1^4 f(x) dx = \frac{8}{3}$.

-
- 5p** c) Zeige, dass das Volumen des Drehkörpers, den man durch die Drehung des Schaubildes der Funktion $g : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{f(x)}$, um die Ox Achse erhält, gleich $\pi \ln(4e)$ ist.